

INTEGRAZIONE IN PIÙ VARIABILI

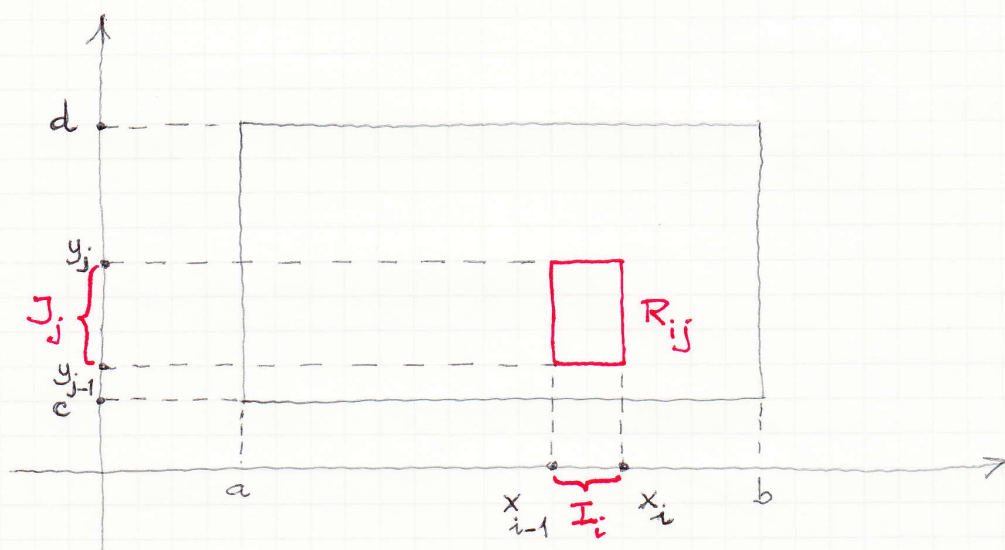
LEZIONE 1

Integrale di Riemann su un rettangolo

$$I = [a, b] \quad \mathcal{P} \text{ partizione di } I \quad \mathcal{P} = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{M-1}, x_M = b\}$$

$$J = [c, d] \quad \mathcal{Q} \text{ partizione di } J \quad \mathcal{Q} = \{y_0 = c, y_1, \dots, y_{S-1}, y_S = d\}$$

$$R = I \times J \quad R_{ij} = I_i \times J_j \quad \text{dove } I_i := [x_{i-1}, x_i], J_j := [y_{j-1}, y_j]$$



$$f: R \rightarrow \mathbb{R} \text{ limitata}; \quad m = \inf_R f \quad M = \sup_R f$$

$$m_{ij} = \inf_{R_{ij}} f, \quad M_{ij} = \sup_{R_{ij}} f$$

$$\text{Poniamo } \mathcal{R} := \mathcal{P} \times \mathcal{Q}, \quad |R_{ij}| := (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

$$s(\mathcal{R}; f) := \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s m_{ij} |R_{ij}| \quad \text{somme inferiori di Riemann}$$

$$S(\mathcal{R}; f) := \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s M_{ij} |R_{ij}| \quad \text{somme superiori di Riemann}$$

\mathcal{R} si chiama *partizione* di R

INTEGRAZIONE IN PIÙ VARIABILI

LEZIONE 2

Dim. (del Teorema di riduzione) Notazioni come all'inizio della lezione precedente. Dimostriamo solo (i)

Sia $\varepsilon > 0$. Poiché $f \in \mathcal{R}(R)$, esiste una partizione $R = P \times Q$ (P partizione di $[a, b]$, Q partizione di $[c, d]$) tale che

$$(*) \quad \sum_{ij} (M_{ij} - m_{ij}) |R_{ij}| < \varepsilon$$

Notiamo che

$$\sum_j \sup_{y \in J_j} G(y) |J_j| - \sum_j \inf_{y \in J_j} G(y) |J_j|$$

$$= \sum_j \left[\sup_{y \in J_j} \sum_i \int_{I_i} f(x, y) dx - \inf_{y \in J_j} \sum_i \int_{I_i} f(x, y) dx \right] |J_j|$$

$$(***) \leq \sum_{ij} \left[\sup_{y \in J_j} \int_{I_i} f(x, y) dx - \inf_{y \in J_j} \int_{I_i} f(x, y) dx \right] |J_j|$$

$$\leq \sum_{ij} (M_{ij} - m_{ij}) |I_i| |J_j|$$

$$< \varepsilon;$$

l'ultima disuguaglianza segue da (*). Abbiamo mostrato che

$$(**) \quad S(Q; G) - s(Q; G) < \varepsilon.$$

Questo implica che $G \in \mathcal{R}([c, d])$ per la CNS di integrabilità.

Notiamo che, ripercorrendo i passaggi di (***), abbiamo

$$\begin{aligned} S(\mathcal{Q}; G) &= \sum_j \sup_{y \in J_j} G(y) |J_j| \\ &\leq \sum_{ij} \sup_{y \in J_j} \int_{I_i} f(x, y) dx |J_j| \\ &\leq \sum_{ij} M_{ij} |I_i| |J_j| \\ &= S(\mathcal{R}; f) \end{aligned}$$

In modo analogo,

$$s(\mathcal{Q}; G) \geq s(\mathcal{R}; f).$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned} S(\mathcal{R}; f) - S(\mathcal{Q}; G) &\leq S(\mathcal{R}; f) - s(\mathcal{R}; f) \\ &\quad (\text{per } *) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Perciò

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{R}} f - \int_c^d G \right| &\leq \left| \int_{\mathcal{R}} f - S(\mathcal{R}; f) \right| + \left| S(\mathcal{R}; f) - S(\mathcal{Q}; G) \right| \\ &\quad + \left| S(\mathcal{Q}; G) - \int_c^d G \right| \\ &< 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Poiché questa disuguaglianza vale per ogni $\varepsilon > 0$, la formula richiesta segue. \square

Verso una definizione di integrale per funzioni definite su insiemi più generali

Sia \mathcal{P} una partizione di $[a, b]$. Un **raffinamento** di \mathcal{P} è una qualunque partizione \mathcal{P}^* di $[a, b]$ che contiene \mathcal{P} . Ricordiamo che se $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione limitata, allora

$$s(\mathcal{P}; \varphi) \leq s(\mathcal{P}^*; \varphi) \leq S(\mathcal{P}^*; \varphi) \leq S(\mathcal{P}; \varphi)$$

Se \mathcal{Q} è una partizione di $[c, d]$ e $\mathcal{Q}^* \supset \mathcal{Q}$, allora $\mathcal{R}^* := \mathcal{P}^* \times \mathcal{Q}^*$ è un raffinamento di $\mathcal{R} := \mathcal{P} \times \mathcal{Q}$. Se $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata, allora

$$s(\mathcal{R}; f) \leq s(\mathcal{R}^*; f) \leq S(\mathcal{R}^*; f) \leq S(\mathcal{R}; f)$$

Ex. Provare le catene di disuguaglianze precedenti (Suggerimento: considerare dapprima il caso in cui \mathcal{P}^* è ottenuto aggiungendo a \mathcal{P} un punto)

Notazione Siano Ω un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Poniamo

$$\tilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & \forall (x,y) \in \Omega \\ 0 & \forall (x,y) \in \Omega^c \end{cases}$$

Ovviamente: \tilde{f} è limitata $\Leftrightarrow f$ è limitata

Siano Ω limitato e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ limitata. Sia R un rettangolo ^(chiuso) contenente Ω . Diremo che \tilde{f} è integrabile in R se la restrizione di \tilde{f} a R appartiene a $\mathcal{R}(R)$.

Teorema Siano Ω limitato, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ limitata, R_1, R_2 ^(chiusi) rettangoli. Valgono:

(i) se $\Omega \subseteq R_1 \subseteq R_2$, allora

$$\tilde{f} \in \mathcal{R}(R_1) \Leftrightarrow \tilde{f} \in \mathcal{R}(R_2).$$

$$\text{Inoltre } \int_{R_1} \tilde{f} = \int_{R_2} \tilde{f}.$$

(ii) se $R_1, R_2 \supseteq \Omega$, allora

$$\tilde{f} \in \mathcal{R}(R_1) \Leftrightarrow \tilde{f} \in \mathcal{R}(R_2).$$

$$\text{Inoltre } \int_{R_1} \tilde{f} = \int_{R_2} \tilde{f}$$

Dim. Esercizio.

□

Def. Siano Ω limitato, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ limitata. Diciamo che f è integrabile (secondo Riemann), e scriviamo $f \in \mathcal{R}$, se esiste un rettangolo (chiuso) $R \supseteq \Omega$ tale che $\mathcal{E}f$ è integrabile su R . In tal caso poniamo

$$\int_{\Omega} f := \int_R \mathcal{E}f$$

N.B. In virtù delle considerazioni precedenti questa è una buona definizione (non dipende, in particolare, dal rettangolo R , che contiene Ω , scelto)

Abbiamo definito

$$\mathcal{R} = \{ \text{funzioni integrabili} \}.$$

Definiamo l'applicazione $I: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ come segue

$$I(f) := \int_{\Omega} f \quad \text{per ogni } f \in \mathcal{R} \text{ nulla in } \Omega^c$$

Chiamiamo funzionale integrale l'applicazione I .

Teorema. Valgono

- (i) \mathcal{R} è uno spazio vettoriale (su \mathbb{R})
- (ii) I è lineare ^{se} $[f, g \in \mathcal{R}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \text{ allora } I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)]$
- (iii) I è monotono $[\text{se } f, g \in \mathcal{R} \text{ e } f \leq g, \text{ allora } I(f) \leq I(g)]$
- (iv) $f \in \mathcal{R} \Rightarrow |f| \in \mathcal{R} \text{ e } |I(f)| \leq I(|f|)$

Dim. Simile a quella vista lo scorso anno per funzioni di una variabile. \square

Misura di Peano-Jordan

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato. Diciamo che Ω è misurabile (secondo Peano-Jordan) se $\mathbb{1}_{\Omega} \in \mathcal{R}$. La misura di Ω (secondo PJ) è

$$m(\Omega) := \int_{\Omega} \mathbb{1}_{\Omega}$$

Oss. (i) La misura di un rettangolo R (con o senza bordo) coincide con l'area elementare di R

(ii) Un punto ha misura nulla. Un insieme costituito da un numero finito di punti ha misura nulla

(iii) L'insieme dei pti di $[0,1] \times [0,1]$ a coordinate razionali non è misurabile (perché la sua funzione caratteristica non è integrabile)

Teorema Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ limitato. Sono equivalenti

(i) E è misurabile e $m(E) = 0$

(chiusi con lati paralleli agli assi)

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists R_1, \dots, R_{N_{\varepsilon}}$ rettangoli t.c.

$$(a) E \subseteq \bigcup_{j=1}^{N_{\varepsilon}} R_j$$

$$(b) \sum_{j=1}^{N_{\varepsilon}} m(R_j) < \varepsilon$$

Dim. (i) \Rightarrow (ii) Sia R un rettangolo chiuso contenente E .

Per ipotesi $\mathbb{1}_E \in \mathcal{R}(\mathcal{R})$. Dato $\varepsilon > 0$ sia \mathcal{R} una partizione di \mathcal{R} t.c.

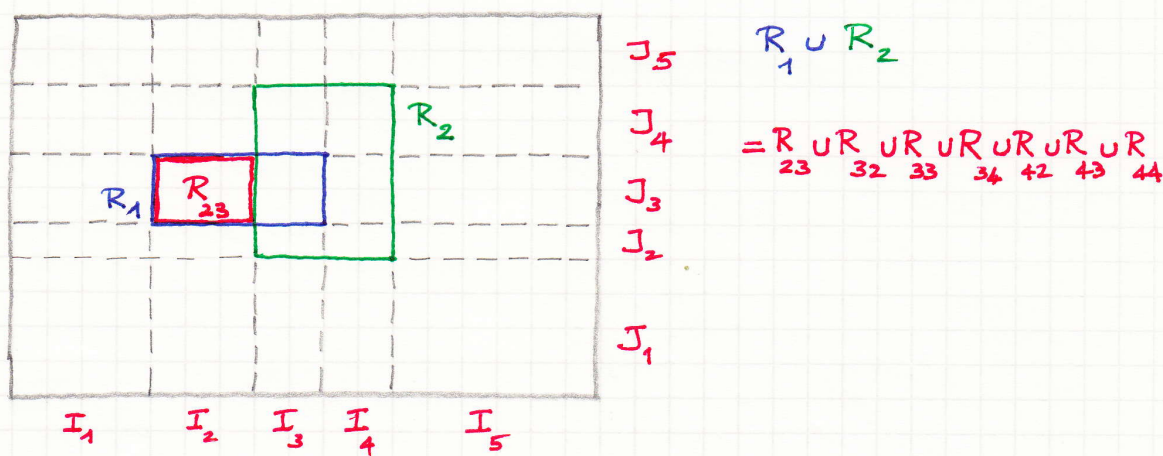
$$S(\mathcal{R}; \mathbb{1}_E) < \varepsilon$$

Siano $R_1, \dots, R_{N_\varepsilon}$ i rettangoli di \mathcal{R} che intersecano E . Allora E è contenuto nella loro unione e

$$\varepsilon > S(\mathcal{R}; \mathbb{1}_E) = \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} |R_j|,$$

come richiesto.

(ii) \Rightarrow (i) Sia \mathcal{R} un rettangolo chiuso contenente $\bigcup_{j=1}^{N_\varepsilon} R_j$. (*)
 È possibile scrivere questa unione come unione di rettangoli chiusi associati a una partizione \mathcal{R}' di \mathcal{R} (vd. figura)



Inoltre, denotati semplicemente con $R'_1, \dots, R'_{N'_\varepsilon}$ i rettangoli di \mathcal{R}' tali che $\bigcup_{j=1}^{N'_\varepsilon} R'_j = \bigcup_{j=1}^{N_\varepsilon} R_j$, abbiamo

$$\sum_{j=1}^{N'_\varepsilon} |R'_j| \leq \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} |R_j| < \varepsilon$$

(*) N.B. Poiché E è limitato, \mathcal{R} può essere scelto indipendentemente da ε

Osserviamo che

$$\begin{aligned} 0 \leq s(\mathcal{R}; \mathbb{1}_E) &\leq S(\mathcal{R}; \mathbb{1}_E) \\ &\leq \sum_{j=1}^{N'_E} |R'_j| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Quindi $\mathbb{1}_E \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$ e $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_E = 0$. Per def. E è misurabile e $m(E) = 0$. \square

Corollario Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann integrabile. Allora il suo grafico G_f è misurabile (in \mathbb{R}^2) e

$$m(G_f) = 0$$

Dim. Fissato $\varepsilon > 0$, sia P una partizione di $[a, b]$ t.c.

$$S(P; f) - s(P; f) < \varepsilon$$

Siano I_1, \dots, I_N gli intervalli associati a P . Posto

$$m_j := \inf_{I_j} f, \quad M_j := \sup_{I_j} f, \quad R_j := I_j \times [m_j, M_j],$$

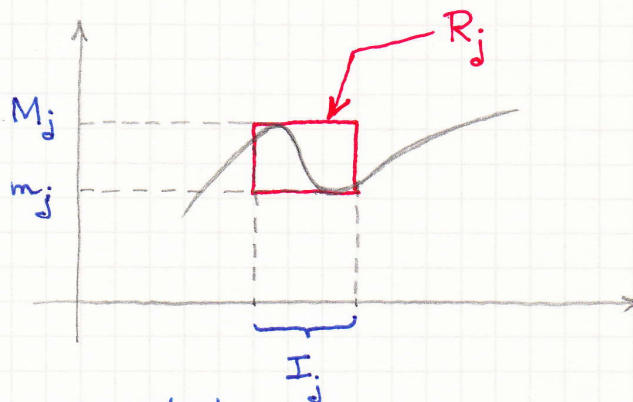
abbiamo

$$G_f \subset \bigcup_{j=1}^N R_j$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N |R_j| &= S(P; f) - s(P; f) \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

da cui la tesi, per il teorema precedente. \square



INTEGRAZIONE IN PIÙ VARIABILI

LEZIONE 3

Proprietà di m

Notazione $\mathcal{M}_{PJ} := \{ \text{sottoinsiemi misurabili di } \mathbb{R}^2 \}^{(*)}$

Potiamo interpretare m come applicazione da \mathcal{M}_{PJ} a $[0, +\infty)$

Teorema Valgono:

(i) $E, F \in \mathcal{M}_{PJ} \Rightarrow E \cap F, E \cup F, E \setminus F, E \Delta F \in \mathcal{M}_{PJ}$

(ii) $m(E \cup F) \leq m(E) + m(F) \quad \forall E, F \in \mathcal{M}_{PJ}$.

Se $E \cap F = \emptyset$, allora

(*) $m(E \cup F) = m(E) + m(F)$ (additività di m)

(iii) $E, F \in \mathcal{M}_{PJ}, E \subseteq F \Rightarrow m(E) \leq m(F)$ (monotonia di m)

(iv) $E \in \mathcal{M}_{PJ}, m(E) = 0, F \subseteq E \Rightarrow F \in \mathcal{M}_{PJ}$ (e quindi $m(F) = 0$)

Dim. Esercizio, utilizzando proprietà dell'integrale, e formule del tipo $\mathbb{1}_{E \cap F} = \mathbb{1}_E \cdot \mathbb{1}_F, \dots$ \square

Os. Utilizzando (*) ricorsivamente, si ottiene che se

$E_1, \dots, E_N \in \mathcal{M}_{PJ}$ e sono mutuamente disgiunti, allora

$$m\left(\bigcup_{j=1}^N E_j\right) = m(E_1) + \dots + m(E_N).$$

(*) Notiamo che $\emptyset \in \mathcal{M}_{PJ}$ e $m(\emptyset) = \int \mathbb{1}_{\emptyset} = 0$

Diciamo allora che m è finitamente additiva.

Notiamo anche che m non è numerabilmente additiva,
poiché può accadere che

$$E_1, E_2, E_3, \dots \in \mathcal{N}_{PJ} \not\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_j \in \mathcal{N}_{PJ}$$

Gia, infatti, $\{q_j\}$ ma qualunque enumerazione dei
punti a coordinate razionali in $[0,1]^2$ e poniamo

$$E_k := \{q_1, \dots, q_k\} \quad k=1,2,3,\dots$$

Gli insiemi E_k appartengono a \mathcal{N}_{PJ} (perché contengono
un numero finito di punti), ma la loro unione
non appartiene a \mathcal{N}_{PJ} .

Si può tuttavia dimostrare che m è condizionatamente
numerabilmente additiva, cioè

$$\underbrace{\{E_j\}}_{\text{mutuamente disgiunti}} \subset \mathcal{N}_{PJ}, \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \in \mathcal{N}_{PJ} \Rightarrow m\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j)$$

Misura interna e misura esterna

Notazione e terminologia Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitato. Poniamo

$$\Pi^\Omega := \{ \text{plurirettangoli contenuti in } \Omega \}$$

$$\Pi_\Omega := \{ \text{plurirettangoli che contengono } \Omega \}$$

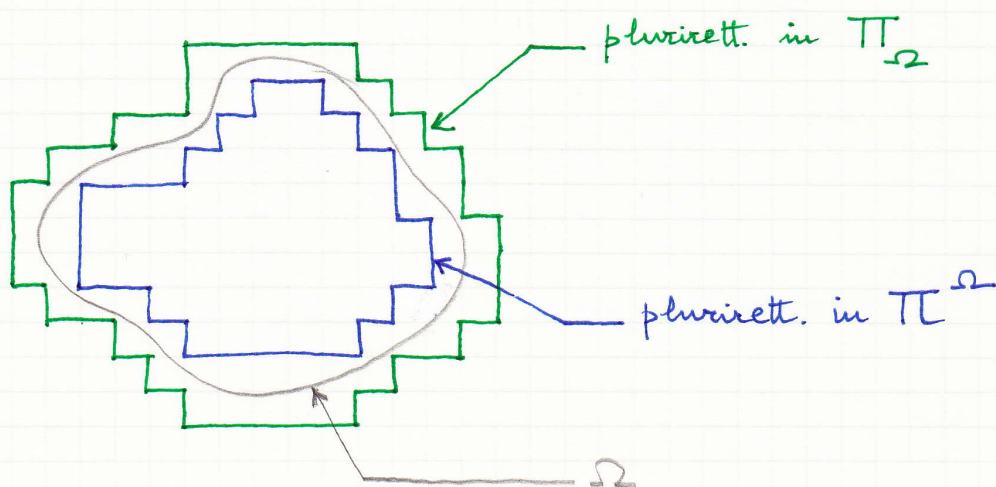
Qui plurirettangolo indica un' mione finita ^(con lati paralleli agli assi) di rettangoli.
Poniamo poi

$$m_*(\Omega) := \sup_{\pi \in \Pi^\Omega} m(\pi)$$

$$m^*(\Omega) := \inf_{\pi \in \Pi_\Omega} m(\pi);$$

$m_*(\Omega)$ e $m^*(\Omega)$ sono numeri reali non negativi e si chiamano, rispettivamente, misura interna e misura esterna (secondo PJ) di Ω .

Obs. Non ha alcuna importanza che gli intervalli utilizzati qui sopra siano aperti o chiusi (vd. Ex. 3).



Oss. $m_*(\Omega)$ e $m^*(\Omega)$ sono definiti per qualunque insieme limitato Ω . Se Ω indica l'insieme dei p.ti di $[0,1]^2$ con entrambe le coordinate razionali, allora

$$m_*(\Omega) = 0 \quad \text{e} \quad m^*(\Omega) = 1$$

Teorema Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitato. Sono equivalenti:

(i) Ω è misurabile

(ii) $m_*(\Omega) = m^*(\Omega)$

(iii) $m^*(\partial\Omega) = 0$

Sia R un rettangolo che contiene Ω .

Dim. (i) \Rightarrow (ii). Poiché Ω è misurabile, $\mathbb{1}_\Omega \in \mathcal{R}$. Per la nota CNS, $\forall \varepsilon > 0 \exists R$, partizione di R t.c.

$$(*) \quad S(R; \mathbb{1}_\Omega) - s(R; \mathbb{1}_\Omega) < \varepsilon$$

Definiamo i plurirettangoli π^R e π_R come segue:

$\pi^R :=$ unione dei rettangoli di R contenuti in Ω

$\pi_R :=$ " " " " " che hanno intersezione non vuota con Ω

Osserviamo che

$$m(\pi_R) = S(R; \mathbb{1}_\Omega), \quad m(\pi^R) = s(R; \mathbb{1}_\Omega)$$

e che $m(\pi_R) \geq m^*(\Omega) \geq m_*(\Omega) \geq m(\pi^R)$, per definizione di misura interna e misura esterna. Poiché, per (*),

$$m(\pi_R) - m(\pi^R) < \varepsilon,$$

Possiamo concludere che

$$m^*(\Omega) - m_*(\Omega) < \varepsilon,$$

da cui la tesi, per l'arbitrarietà di ε .

Sia $\varepsilon > 0$.

(ii) \Rightarrow (iii) Siano $\pi_1 \in \mathcal{T}_\Omega$, $\pi_2 \in \mathcal{T}_\Omega$ t.c.

$$(**) \quad m(\pi_2) - m(\pi_1) < \varepsilon.$$

Osserviamo che $\partial\Omega \subseteq \bar{\pi}_2 \setminus \pi_1^\circ$. La monotonia di m^* implica che

$$m^*(\partial\Omega) \leq m^*(\bar{\pi}_2 \setminus \pi_1^\circ)$$

$$(\bar{\pi}_2 \setminus \pi_1^\circ \text{ è mis.}) \quad = m(\bar{\pi}_2 \setminus \pi_1^\circ)$$

$$(\pi_1^\circ \subset \bar{\pi}_2) \quad = m(\bar{\pi}_2) - m(\pi_1^\circ)$$

$$= m(\pi_2) - m(\pi_1)$$

$$(\text{per } (**)) \quad < \varepsilon$$

Per l'arbitrarietà di ε abbiamo $m^*(\partial\Omega) = 0$
(e quindi $\partial\Omega$ è mis. e $m(\partial\Omega) = 0$).

(iii) \Rightarrow (i) L'ipotesi implica che $\partial\Omega$ è misurabile e $m(\partial\Omega) = 0$. Per la caratterizzazione degli insiemi di misura nulla dimostrata nella lezione 2,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R_1, \dots, R_{N_\varepsilon} \text{ rettangoli (non necessariamente disgiunti)} \\ \text{t.c.} \quad \partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^{N_\varepsilon} R_j \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{N_\varepsilon} |R_j| < \varepsilon.$$

Ricordiamo che R è un rettangolo contenente Ω . Esiste una partizione R' di R ed esistono rettangoli $R'_1, \dots, R'_{N'_\epsilon}$ associati a R' (quindi con interni a due a due disgiunti) tali che

$$\bigcup_{j=1}^{N_\epsilon} R_j = \bigcup_{j=1}^{N'_\epsilon} R'_j.$$

Siano π_1 e π_2 i plurirettangoli definiti come segue

$$\pi_1 := \text{unione dei rettangoli di } R' \text{ contenuti in } \Omega$$

$$\pi_2 := \pi_1 \cup \left(\bigcup_{j=1}^{N'_\epsilon} R'_j \right)$$

Ovviamente $\pi_1 \subset \Omega \subset \pi_2$ e $\pi_2 \setminus \pi_1 \subseteq \bigcup_{j=1}^{N'_\epsilon} R'_j$. Quindi

$$\begin{aligned} m(\pi_2) - m(\pi_1) &\leq m\left(\bigcup_{j=1}^{N'_\epsilon} R'_j\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{N_\epsilon} |R_j| \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Poiché $m(\pi_2) \stackrel{(*)}{\geq} S(R; \mathbb{1}_\Omega)$ e $m(\pi_1) = s(R; \mathbb{1}_\Omega)$,
abbiamo

$$S(R; \mathbb{1}_\Omega) - s(R; \mathbb{1}_\Omega) < \epsilon$$

e quindi $\mathbb{1}_\Omega$ è integrabile, cioè Ω è misurabile. \square

(*) Mostrare, con un esempio, che può valere la disuguaglianza stretta

Funzioni generalmente continue

Def. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitato e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Diciamo che f è **generalmente continua** se l'insieme dei pti in cui f non è continua ha misura nulla.

Es. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è un aperto limitato ^{misurabile} e $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, allora f è generalmente continua.

Infatti i pti di discontinuità di f sono contenuti in $\partial\Omega$, che ha misura nulla poiché Ω è misurabile (vd. teorema precedente)

Teorema Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ limitato e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ limitata e generalmente continua. Allora $f \in \mathcal{R}$

Dim. Siano R un rettangolo contenente Ω . L'insieme D dei pti di discontinuità di f è contenuto in R e $m(D) = 0$. La caratterizzazione degli insiemi di misura nulla assicura che $\forall \varepsilon > 0 \exists R$, partizione di R , t.c. l'unione dei rettangoli di R che contengono punti di D ha misura $< \varepsilon$. Sia π l'unione dei rettangoli di R che hanno intersezione vuota con D . Ovviamente π è un compatto (ricordiamo che i rettangoli associati a una partizione sono chiusi per definizione) e $f \in \mathcal{C}(\pi)$. Per il teorema di Cantor-Heine f è unif. continua su π . Passando eventualmente a un raffinamento di R (che, per comodità, continueremo a chiamare R)

possiamo supporre che su ogni rettangolo R_{ij} di \mathcal{R} contenuto in π si abbia $M_{ij} - m_{ij} < \varepsilon$. Sia poi $M := \sup |f|$. Allora

$$\begin{aligned} S(\mathcal{R}; \mathcal{E}f) - s(\mathcal{R}; \mathcal{E}f) &= \sum_{ij: R_{ij} \subseteq \pi} (M_{ij} - m_{ij}) |R_{ij}| \\ &\quad + \sum_{ij: R_{ij} \subseteq \mathcal{R} \setminus \pi} (M_{ij} - m_{ij}) |R_{ij}| \\ &\leq \varepsilon \sum_{ij: R_{ij} \subseteq \pi} |R_{ij}| \\ &\quad + 2M \sum_{ij: R_{ij} \subseteq \mathcal{R} \setminus \pi} |R_{ij}| \\ &\leq \varepsilon |\mathcal{R}| + 2M \varepsilon, \end{aligned}$$

da cui segue l'integrabilità richiesta. \square

Def. Siano $g_1, g_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. La regione

$$\Omega_1 := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2: x \in [a, b], \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \}$$

si dice **semplice** (o **normale**) rispetto all'asse y .

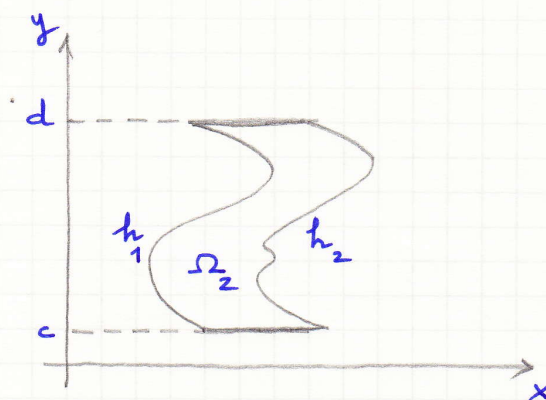
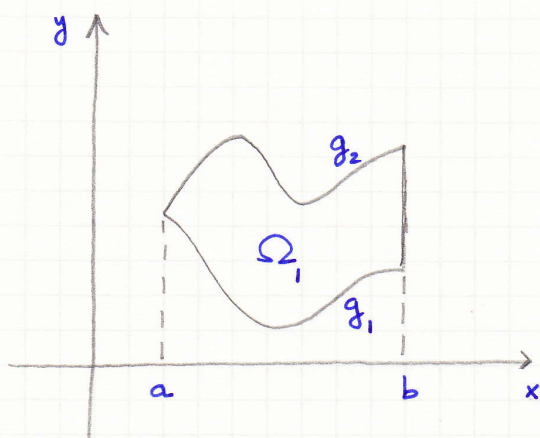
Analogamente, siano $h_1, h_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. La regione

$$\Omega_2 := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2: y \in [c, d], \quad h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \}$$

si dice **semplice** (o **normale**) rispetto all'asse x .

Obs. Siano Ω semplice e $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. allora $f \in \mathcal{R}$

Infatti i pti di disc. di $\mathcal{E}f$ sono contenuti nel bordo di Ω che ha misura nulla



Se $f: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora

$$(*) \quad \int_{\Omega_1} f = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy.$$

Similmente, se $f: \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora

$$\int_{\Omega_2} f = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx.$$

Dim (di (*)). Infatti, per x fissato in $[a, b]$, la f.ne $y \mapsto f(x, y)$ ha, al più, due punti di discontinuità in $[c, d]$ e cioè $g_1(x)$ e $g_2(x)$. Dunque, $y \mapsto f(x, y)$ è in $\mathcal{R}([c, d])$ e (*) segue dal Teorema di riduzione. \square

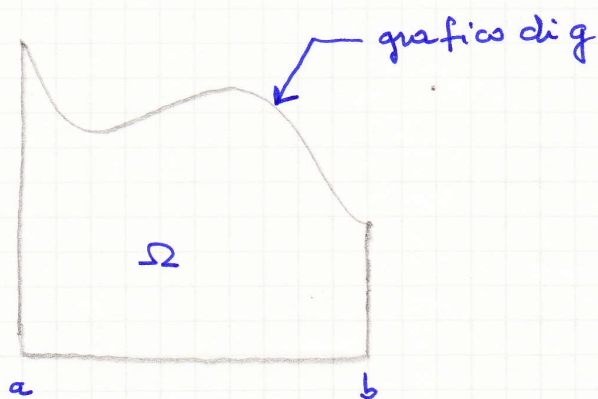
Corollario. Sia $g \in \mathcal{R}([a, b])$ non negativa. Poniamo

$$\Omega := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], 0 \leq y \leq g(x) \}$$

Allora Ω è misurabile e

$$m(\Omega) = \int_a^b g.$$

Dim. $\partial\Omega$ è l'unione di tre segmenti (che hanno misura



nulla) e del grafico di g , che ha misura nulla, perché
 $g \in \mathcal{R}([a, b])$. Quindi $m(\partial\Omega) = 0$, da cui Ω è mis.
 per un risultato precedente. La funzione $\mathbb{1}_{\Omega}$ è perciò
 in \mathcal{R} ed è continua in Ω . Per la formula (*)
 della pagina precedente

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{R}} \mathbb{1}_{\Omega} &= \int_a^b dx \int_0^{g(x)} dy \\
 &= \int_a^b g(x) dx
 \end{aligned}$$

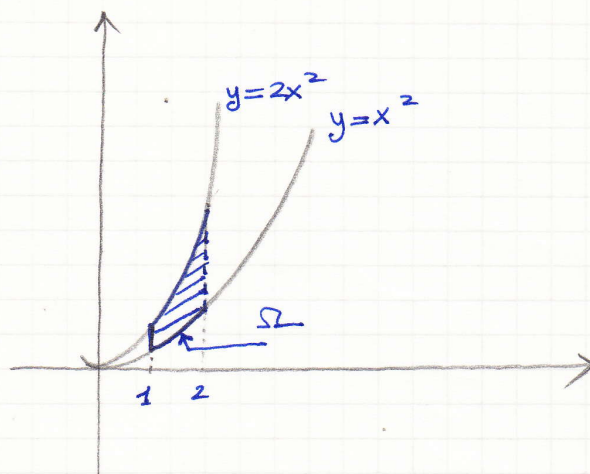
da cui la tesi. □

Es. Diamo $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2x^2, 1 \leq x \leq 2\}$ e
 $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

I punti di discontinuità di ∂f sono contenuti in (anzi, coincidono
 con) $\partial\Omega$, che ha misura nulla, perché è unione dei
 grafici di quattro funzioni continue (e quindi \mathcal{R} -int.)

Per ogni $x \in [1, 2)$ la
funzione $y \mapsto G_f(x, y)$
ha due soli punti di
discontinuità.



Applicando la formula di riduzione (*), abbiamo

$$\int_{\Omega} f = \int_1^2 dx \int_{x^2}^{2x^2} \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

$$= \int_1^2 \frac{dx}{x} \int_{x^2}^{2x^2} \frac{dy}{1 + (y/x)^2}$$

$$(y/x = t) \quad = \int_1^2 dx \int_x^{2x} \frac{dt}{1 + t^2}$$

$$= \int_1^2 [\arctg(2x) - \arctg x] dx$$

$$= \dots$$

INTEGRAZIONE IN PIÙ VARIABILI

LEZIONE 4

Integrazione in \mathbb{R}^n , $n \geq 3$

La teoria presentata nelle lezioni precedenti si estende a \mathbb{R}^n , con piccole modifiche. Qui R indicherà, invece di un rettangolo $\subset \mathbb{R}^2$, un n -intervallo, cioè un insieme della forma

$$R := [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n].$$

Se $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata, le definizioni di $\int_{-R} f$, $\int_R f$, integrabilità di f in R , $\int_R f$, $\mathcal{R}(R)$ sono, *mutatis mutandis*, del tutto analoghe a quelle viste in \mathbb{R}^2 . Inoltre

$$f \in \mathcal{C}(R) \Rightarrow f \in \mathcal{R}(R)$$

con la medesima dimostrazione.

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è limitato e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è limitata, $\mathcal{C}f$, l'integrabilità di f , la classe \mathcal{R} e $\int_{\Omega} f$ si definiscono come nel caso $n=2$. Le proprietà del funzionale I sono identiche a quelle già viste.

Le def. di insieme misurabile (secondo Peano-Jordan) e di misura di PJ, così come la caratterizzazione degli insiemi di misura nulla, non presentano variazioni rispetto al caso bidimensionale.

Attenzione: un rettangolo ^{non degenero} ha misura 2-dim di PJ non nulla, ma ha misura 3-dim. nulla, così come un

non degenerare
segmento γ ha misura di \mathbb{P}^1 1-dim. non nulla, ma misura 2-dim nulla

Teorema Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ misurabile (come sottoinsieme di \mathbb{R}^2) e $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione in \mathcal{R} . Allora G_f ha misura 3-dim nulla.

Dim. Del tutto analoga a quella vista in dim. inferiore \square
[Ades., le sfere in \mathbb{R}^3 sono insiemi misurabili]

Misura interna, misura esterna e caratterizzazione degli insiemi misurabili (Ω mis $\Leftrightarrow m_*(\Omega) = m^*(\Omega) \Leftrightarrow m^*(\partial\Omega) = 0$) si estendono al caso n -dim. Idem per le funzioni generalmente continue e le loro proprietà

Def. Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ misurabile e $g_1, g_2: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni in \mathcal{R} tali che $g_1 \leq g_2$. La regione

$$E := \{ (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \Omega \text{ e } g_1(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq g_2(x_1, \dots, x_{n-1}) \}$$

si dice semplice (o normale) rispetto all'asse x_n .

Formule di riduzione

È possibile provare una formula di riduzione per ogni modo di ripartire le variabili x_1, \dots, x_n in due gruppi. Per semplicità (a questo caso ci si può sempre ricondurre rinominando le variabili) supponiamo che $\underline{x} = (\underline{x}', \underline{x}'')$, dove

$$\underline{x}' = (x_1, \dots, x_k) \quad \underline{x}'' = (x_{k+1}, \dots, x_n)$$

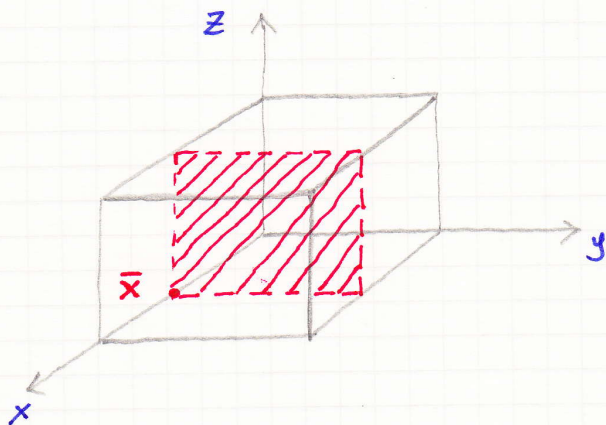
Teorema Sia $R = R' \times R''$ un n -intervallo, dove R' e R'' sono, rispettivamente, un k -intervallo e un $n-k$ intervallo. Supponiamo $f \in \mathcal{R}(R)$. Se per ogni $\underline{x}' \in R'$ la f.n.e. $\underline{x}'' \mapsto f(\underline{x}', \underline{x}'')$ appartiene a $\mathcal{R}(R'')$, allora la f.n.e.

$$G(\underline{x}') := \int_{R''} f(\underline{x}', \underline{x}'') d\underline{x}''$$

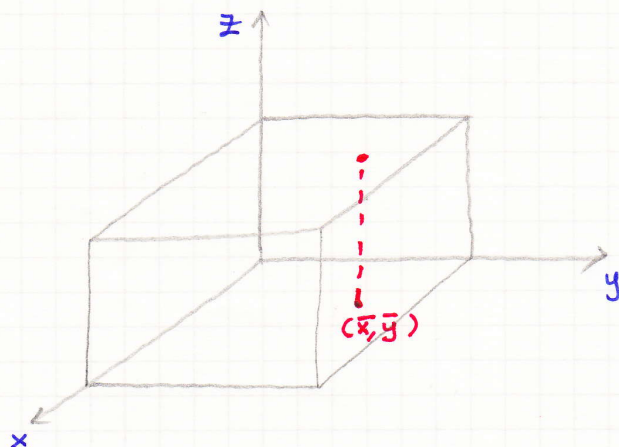
è in $\mathcal{R}(R')$ e

$$\int_R f = \int_{R'} d\underline{x}' \int_{R''} f(\underline{x}', \underline{x}'') d\underline{x}''$$

Es. $n=3$, $k=1$; integrazione per strati



$n=3$, $k=2$; integrazione per fili



Es. Provare che $f(x,y,z) = |x|$ è integrabile su $\bar{B}_R := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ e calcolare

$$\int_{\bar{B}_R} f(x,y,z) \, dx \, dy \, dz$$

Poiché $\partial \bar{B}_R$ è unione dei grafici di due funzioni continue (ad es. $g(x,y) = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$) essa ha misura nulla $\Rightarrow \bar{B}_R$ è misurabile. Inoltre $f \in \mathcal{C}(\bar{B}_R)$ e quindi $f \in \mathcal{R}$.

Integriamo per fili paralleli all'asse x. Fissiamo (y,z) e consideriamo la sezione

$$x \mapsto f(x,y,z)$$

Essa è nulla se $(y,z) \notin D_R := \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq R^2\}$ ed è

$$|x| \mathbb{1}_{\left[-\sqrt{R^2 - (y^2 + z^2)}, \sqrt{R^2 - (y^2 + z^2)}\right]}$$

altrimenti.

Abbiamo

$$\begin{aligned}\int_{\overline{B}_R} f &= \int_{D_R} dy dz \int_{-\sqrt{R^2-(y^2+z^2)}}^{\sqrt{R^2-(y^2+z^2)}} |x| dx \\&= \int_{D_R} [R^2 - (y^2 + z^2)] dy dz \\&= R^2 m_2(D_R) - \int_{D_R} y^2 dy dz - \int_{D_R} z^2 dy dz\end{aligned}$$

Calcoliamo $\int_{D_R} y^2 dy dz$ in modo analogo

$$\begin{aligned}\int_{D_R} y^2 dy dz &= 4 \int_0^1 dy y^2 \int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} dz \\&= 4 \int_0^1 y^2 \sqrt{R^2-y^2} dy \\(y=R\sin\theta) &= 4 \int_0^{\pi/2} R^2 \sin^2\theta \sqrt{R^2-R^2\sin^2\theta} R \cos\theta d\theta \\&= 4 \int_0^{\pi/2} R^4 \sin^2\theta \cos^2\theta d\theta \\&= R^4 \int_0^{\pi/2} \sin^2(2\theta) d\theta \\&= \frac{R^4}{2} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos(4\theta)) d\theta \\&= \frac{\pi R^4}{4}.\end{aligned}$$

Integriamo ora per strati paralleli al piano (y,z)

La funzione

$$(y,z) \mapsto f(x,y,z)$$

è nulla se $x \notin [-R,R]$ ed è

$$|x| \mathbb{1}_{\overline{B}_R(x)}(y,z)$$

se $x \in [-R, R]$. Qui $\bar{B}_R(x) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq R^2 - x^2\}$.
Abbiamo

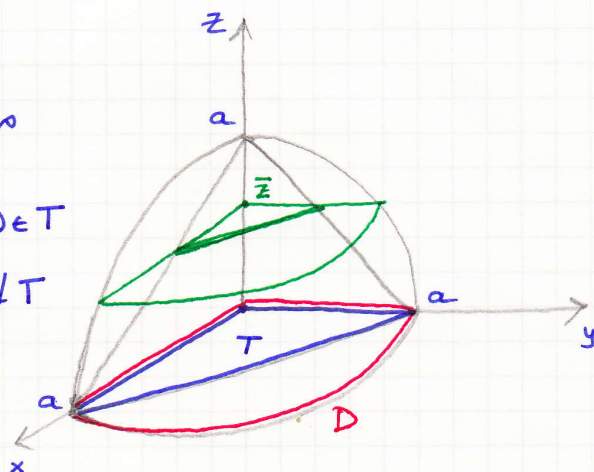
$$\begin{aligned} \int_{\bar{B}_R} f &= \int_{-R}^R dx |x| \int_{\bar{B}_R(x)} dy dz \\ &= \int_{-R}^R |x| \pi (R^2 - x^2) dx \\ &= \frac{\pi}{2} R^4 \end{aligned}$$

Es. Mostare che $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x + y + z \geq a, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ è misurabile e calcolarne la misura

E è normale rispetto al piano xy . Poniamo

$$g_1(x, y) = \begin{cases} a - x - y & \forall (x, y) \in T \\ 0 & \forall (x, y) \notin T \end{cases}$$

$$g_2(x, y) = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}$$



La misurabilità segue dal fatto che g_1, g_2 sono continue e che il dominio è normale. Inoltre

$$\begin{aligned} m_3(E) &= \int_D dx dy \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} dz \\ &= \int_D [g_2(x, y) - g_1(x, y)] dx dy \\ &= \int_T [\sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} - (a - x - y)] dx dy \\ &\quad + \int_{D \setminus T} \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} dx dy \end{aligned}$$

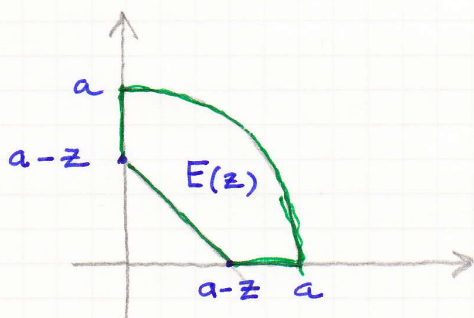
$$= \underbrace{\int_D \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} \, dx \, dy}_{= \frac{1}{6} \pi a^3} - \underbrace{a \, m_2(T)}_{= \frac{1}{2} a^3} + \underbrace{\int_T (x+y) \, dx \, dy}_{= \frac{1}{3} a^3}$$

(come nel precedente integrale)

Completivamente $m_3(E) = \frac{1}{6} (\pi - 1) a^3$.

Integriamo ora per strati paralleli al piano xy. La sezione di E con z costante è

$$E(z) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq z^2 - a^2, \, x+y \geq a-z, \, x \geq 0, y \geq 0\} \quad \forall z \geq 0$$



Abbiamo

$$m_3(E) = \int_0^a dz \, m_2(E(z))$$

Poiché

$$m_2(E(z)) = \frac{\pi}{4} (a^2 - z^2) - \frac{(a-z)^2}{2}$$

si ricava $m_3(E) = \frac{1}{6} (\pi - 1) a^3$.

Es. (Volume dei solidi di rotazione) Sia $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e non negativa. Il solido di rotazione generato dalla rotazione del grafico di φ intorno all'asse z è

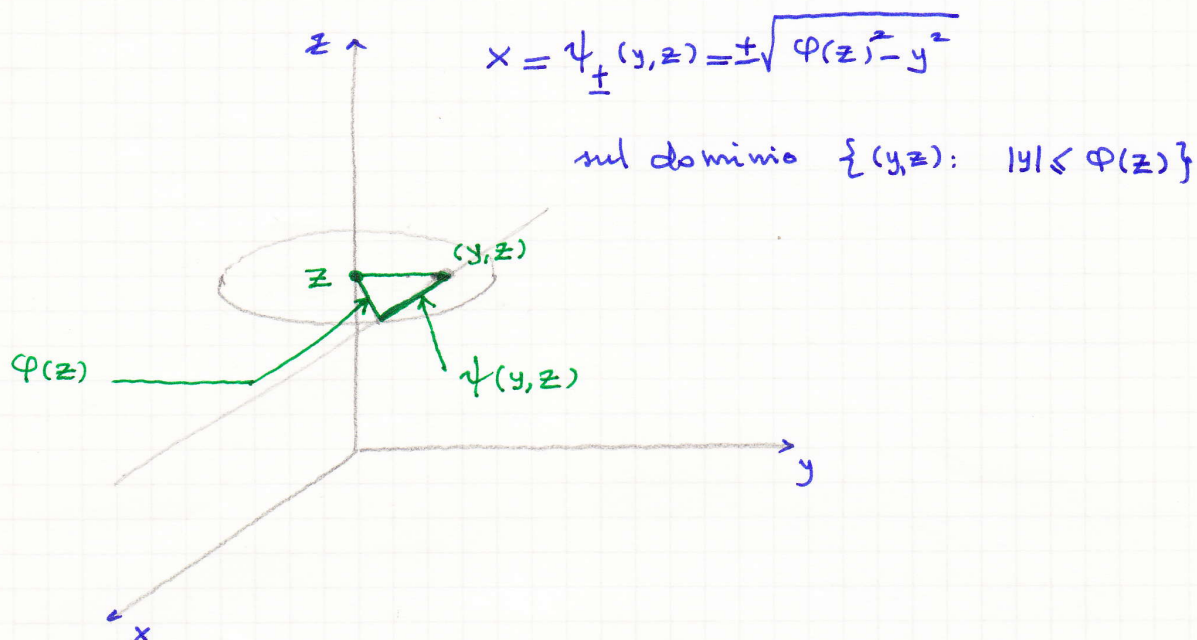
$$S := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq \varphi(z)^2, \, a \leq z \leq b\}$$

S è misurabile perché ∂S è unione dei due dischi

$$D_a := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = \varphi(a)^2\}$$

e $\underset{b}{D} := \{(x, y, z): x^2 + y^2 = \varphi(z)^2\}$

e dei grafici di due funzioni continue



Integrando per strati paralleli al piano xy , abbiamo

$$\begin{aligned} m_3(S) &= \int_a^b m_2(S(z)) dz \\ &= \pi \int_a^b (\varphi(z))^2 dz \end{aligned}$$

Es. (Intersezione di due cilindri) Sia

$$K := \{(x, y, z): x^2 + z^2 \leq R^2, y^2 + z^2 \leq R^2\}:$$

K è l'intersezione di due cilindri e si può facilmente scrivere come intersezione di porzioni (limitate e) misurabili dei due cilindri $\{x^2 + z^2 \leq R^2\}$ e $\{y^2 + z^2 \leq R^2\}$

Notiamo che, se $-R \leq z \leq R$, allora

$$K(z) = \{(x, y): |x| \leq \sqrt{R^2 - z^2}, |y| \leq \sqrt{R^2 - z^2}\}$$

che è un quadrato di lato $2\sqrt{R^2 - z^2}$, che è un insieme misurabile. Integrando per strati paralleli al piano xy , otteniamo

$$\begin{aligned} m(K) &= \int_{-R}^R dz \, 4(R^2 - z^2) \\ &= \frac{16}{3} R^3. \end{aligned}$$

Es. Calcolare $\int_E z \, dx \, dy \, dz$, dove

$$E = \{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \}$$

E è misurabile, perché è semplice. Integrando per fili sul dominio $D = \{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq 1 \}$ si ottiene

$$\int_E z \, dx \, dy \, dz = \int_D dx \, dy \, \frac{1}{2} [x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)^2]$$

Tralasciamo il calcolo esplicito di questo integrale doppio, che risulterà molto semplice utilizzando il Teorema di cambio di variabili.

INTEGRAZIONE IN PIÙ VARIABILI

LEZIONE 5

Scopo della lezione: discutere una formula di cambiamento di variabili per integrali multipli

Caso 1-dim: siano $f \in \mathcal{C}([a,b])$, $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a,b]$ derivabile e tale che $\varphi(\alpha) = a$ e $\varphi(\beta) = b$ (oppure $\varphi(\alpha) = b$ e $\varphi(\beta) = a$), allora

$$(*) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt \quad (\text{oppure...})$$

N.B.: non assumiamo φ invertibile

(*) segue dal Teorema fondamentale del calcolo. Infatti, se F è una primitiva di f , allora $F \circ \varphi$ è una primitiva di $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ e

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= F(b) - F(a) = (F \circ \varphi)(\beta) - (F \circ \varphi)(\alpha) \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} (F \circ \varphi)(t) dt \\ (**) \quad &= \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt. \end{aligned}$$

Se φ è invertibile, allora $\varphi' \geq 0$ in ogni punto di $[\alpha, \beta]$ oppure $\varphi' \leq 0$ in ogni punto di $[\alpha, \beta]$. Nel primo caso

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t) |\varphi'(t)| dt$$

Nel secondo caso $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = \alpha$ e, procedendo come in (**)

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= F(b) - F(a) = (F \circ \varphi)(\alpha) - (F \circ \varphi)(\beta) \\ &= \int_{\beta}^{\alpha} (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t) \underbrace{(-\varphi'(t))}_{\parallel | \varphi'(t) |} dt \end{aligned}$$

In ogni caso, dunque, se φ è invertibile

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \varphi)(t) |\varphi'(t)| dt$$

Questa è la formula che si presta a generalizzazioni per $n \geq 2$.

Mappe invertibili

Ricordiamo che $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ è invertibile (globalmente) se e solo se la matrice che rappresenta A rispetto a una base fissata di \mathbb{R}^n è invertibile. Poiché

$$dA(\underline{x}) = A \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$$

possiamo riformulare l'affermazione precedente dicendo che $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ è invertibile (globalmente) se e solo se $dA(\underline{x})$ è non singolare per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$.

Sia $\underline{\Phi}: \overset{\text{aperto}}{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$ e supponiamo che $d\underline{\Phi}(\underline{x})$ sia invertibile (non singolare). In

generale $\underline{\Phi}$ non è globalmente invertibile

Es. $\underline{\Phi}(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$; poiché $\underline{\Phi}(x, y+2k\pi) = \underline{\Phi}(x,y)$, $\underline{\Phi}$ è non invertibile globalmente. Tuttavia

$$d\underline{\Phi}(x,y) \cong \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix} = J_{\underline{\Phi}}(x,y)$$

e $\det J_{\underline{\Phi}}(x,y) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, cosicché $d\underline{\Phi}(x,y)$ è invertibile in ogni punto di \mathbb{R}^2 .

Ques. Notiamo che la ^{sola} differenziabilità di $\underline{\Phi}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e l'ipotesi $\underline{\Phi}'(x_0) \neq 0$ non implicano nemmeno l'invertibilità di $\underline{\Phi}$ in un intorno di x_0 . Ad esempio

$$\underline{\Phi}(t) := \begin{cases} t + 2t^2 \sin(1/t) & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

è derivabile ovunque, $\underline{\Phi}'(0) = 1$, $\underline{\Phi}'$ è limitata in $(-1,1)$ ma f non è 1-1 in alcun intorno di 0 (per esercizio)

Teorema (della funzione inversa) Siano $\underline{f}: \overset{\text{aperto}}{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$, $\underline{x}_0 \in \Omega$, $d\underline{f}(\underline{x}_0)$ invertibile. Allora

(i) esistono un aperto U contenente \underline{x}_0 , un aperto V contenente $\underline{f}(\underline{x}_0)$, tali che \underline{f} è biunivoca tra U e V ;

(ii) la funzione inversa $\underline{f}^{-1}: V \rightarrow U$ è di classe $\mathcal{C}^1(V)$

e

$$d(\underline{f}^{-1})(\underline{f}(x)) = d\underline{f}(x)^{-1} \quad \forall x \in U$$

Dim. vd. [Rushin, p. 221], [Giusti, p. 316], [Roux, p. 97] \square

Def. Siano A, B due aperti di \mathbb{R}^n . Un diff.smo di classe \mathcal{C}^1 tra A e B è una funzione $\Phi: A \rightarrow B$, biunivoca, $\mathcal{C}^1(A)$, con inversa di classe $\mathcal{C}^1(B)$.

Una mappa $\underline{\psi}: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice diff.smo locale di classe \mathcal{C}^1 se per ogni $x_0 \in A$ esiste un intorno U di x_0 tale che $\underline{\psi}|_U$ è un diff.smo di classe \mathcal{C}^1 tra U e $\underline{\psi}(U)$.

Corollario Siano $\underline{f}: \overset{\text{aperto}}{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una f.ne di classe $\mathcal{C}^1(\Omega)$ t.c. $d\underline{f}(x)$ sia invertibile per ogni $x \in \Omega$. Allora \underline{f} è un diff.smo locale di classe \mathcal{C}^1 (in Ω). Inoltre $\underline{f}(\Omega)$ è aperto.

Dim. Segue dal Teorema della funzione inversa. \square

Es. $\underline{f}(x, y) = (e^x - y, x + e^y)$ è localmente invertibile in ogni p.to di \mathbb{R}^2 . Infatti

$$\det J_{\underline{f}}(x, y) = \det \begin{bmatrix} e^x & -1 \\ 1 & e^y \end{bmatrix} = e^{x+y} + 1 > 0$$

Inoltre

$$J_{\underline{f}^{-1}}(\underline{f}(x, y)) = \frac{1}{e^{x+y} + 1} \begin{bmatrix} e^y & 1 \\ -1 & e^x \end{bmatrix}$$

$$\det d\Phi(\rho, \theta, \varphi) = \rho^2 \sin \varphi \neq 0 \quad \text{se } \varphi \notin \{k\pi: k \in \mathbb{Z}\}$$

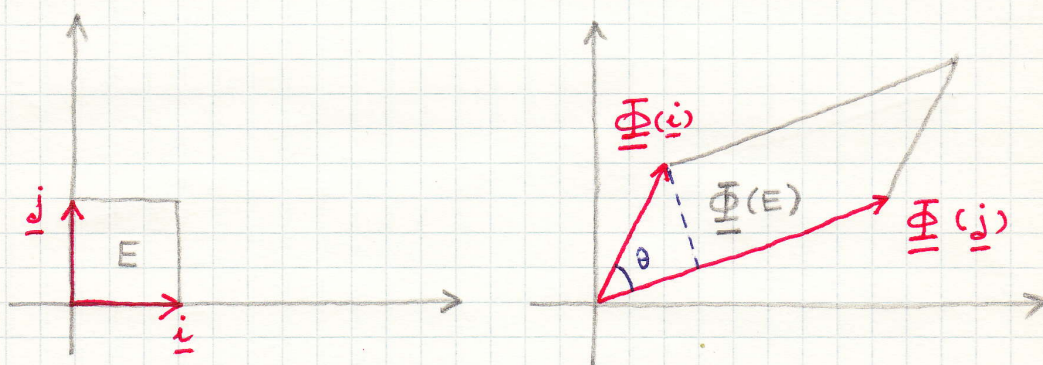
Trasformazioni di insiemi

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, E sottoinsieme misurabile di Ω

Problema: $\Phi(E)$ è misurabile? Se, sì, come sono legate tra loro le misure di E e di $\Phi(E)$?

Si tratta di un problema complesso. Qui ci limiteremo ad alcune considerazioni.

Es. $E = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$, Φ lineare invertibile



In questo caso $\Phi(E)$ è un parallelogramma (vd. figura) e

$$m_2(\Phi(E)) = |\Phi(\underline{i})| \sin \theta |\Phi(\underline{j})|$$

$$= |\Phi(\underline{i}) \wedge \Phi(\underline{j})|$$

$$\begin{aligned} (\text{def. di } \wedge) \quad &= \left| \det \begin{bmatrix} s & t \\ u & v \end{bmatrix} \right| \quad \left[\text{qui } \begin{aligned} \Phi(\underline{i}) &= s\underline{i} + t\underline{j} \\ \Phi(\underline{j}) &= u\underline{i} + v\underline{j} \end{aligned} \right] \\ &= |\det J_{\Phi}| \, m_2(E) \end{aligned}$$

Tenendo conto della definizione di misura, la formula precedente si può riscrivere (ricordando che $J_{\underline{\Phi}}$ è costante)

$$(*) \quad \int_{\underline{\Phi}(E)} 1 = \int_E 1 | \det J_{\underline{\Phi}} |$$

Se ora E è un qualunque insieme misurabile $\subset \Omega$
e $\underline{\Phi}$ è come sopra il conto della pagina precedente
si può ripetere per tutti i pluriangoli in Π^E e
in Π_E e concludere che (*) vale anche in questo
caso più generale.

Le considerazioni precedenti si estendono, con dimostrazione
più complicata al caso di insiemi misurabili in \mathbb{R}^n . (*)
[vd. Giusti, p. 236 segg.]

Cambiamento di variabile negli integrali multipli

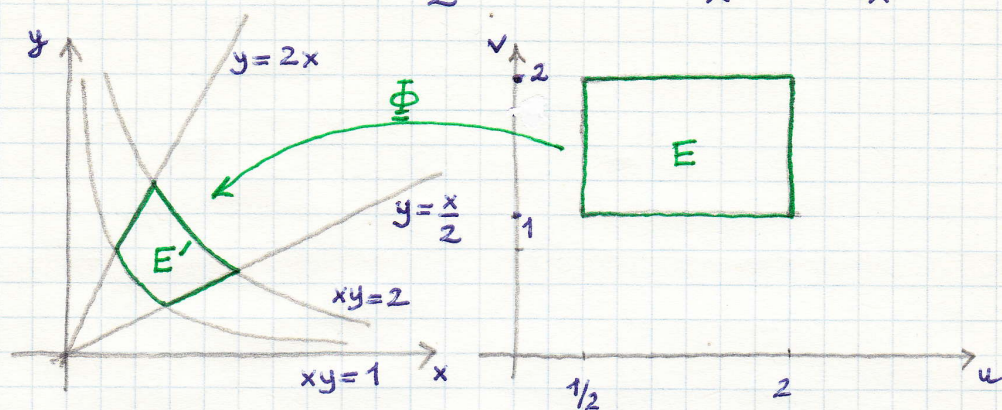
Teorema (di cambiamento di variabile) Siano $\underline{\Phi}: \overset{\text{aperto}}{\Omega} \rightarrow \underline{\Phi}(\Omega)$
 $\subseteq \mathbb{R}^n$
un diffeomorfismo di classe \mathcal{C}^1 , $E \subseteq \Omega$ misurabile,
Se le derivate parziali di $\underline{\Phi}$ sono limitate in E e
 f è continua e limitata in $\underline{\Phi}(E)$, allora

$$\int_{\underline{\Phi}(E)} f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_E f(\underline{\Phi}(\underline{t})) | \det J_{\underline{\Phi}}(\underline{t}) | d\underline{t}$$

(*) In particolare, se E è mis. e $\underline{\Phi}$ è lineare, allora

$$m_n(\underline{\Phi}(E)) = | \det \underline{\Phi} | m_n(E)$$

Es. $E' = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{2} \leq y \leq 2x, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x} \}$



La mappa

$$(u, v) = \underline{\psi}(x, y) = \left(\frac{y}{x}, xy \right) \quad \text{in } \Omega' := \{ x > 0, y > 0 \}$$

è un diff.smo di classe \mathcal{C}^1 su Ω' . Notiamo che

$$\det \underline{J}_{\underline{\psi}}(x, y) = \det \begin{bmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{bmatrix} = -2 \frac{y}{x} \neq 0 \text{ in } \Omega'$$

Utilizzando la formula del teorema precedente e il fatto che, posto $\underline{\Phi} := \underline{\psi}^{-1}$, $\underline{\Phi}(E) = E'$, abbiamo

$$\begin{aligned} m_2(E') &= \int \mathbb{1}_{E'}(x, y) \, dx \, dy \\ &= \int \mathbb{1}_E(u, v) \, |\det \underline{J}_{\underline{\Phi}}(u, v)| \, du \, dv \\ &= \int_E \frac{1}{2u} \, du \, dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{1/2}^2 \left(\frac{1}{u} \right) du \int_1^2 dv \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

Es. Calcolare $\int_{\bar{B}} (x-y) \cos(x^2+y^2) dx dy$, dove

$\bar{B} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$. Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ l'integranda.

Osserviamo che \bar{B} è misurabile (∂B ha misura nulla...) e $f \in \mathcal{C}(\bar{B})$. Quindi f è integrabile.

È conveniente applicare una trasformazione (coordinate polari). Sia $\underline{\Phi}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) : \underline{\Phi}([0,1] \times [0,2\pi]) = \bar{B}$. Tuttavia $\underline{\Phi}$ non è iniettiva su $[0,1] \times [0,2\pi)$ e quindi il Teorema di cambiamento di variabili non è immediatamente applicabile. Possiamo, però, ragionare come segue: la restrizione di $\underline{\Phi}$ a $(0,1) \times (0,2\pi)$ è un diff. smo globale su $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2+y^2 < 1, \text{ e } (x,y) \text{ non appartenente al segmento } [0,1) \text{ dell'asse } x\}$. Anche E è misurabile (∂E ha misura nulla) e f è integrabile su E . Inoltre

$$\int_{\bar{B}} (x-y) \cos(x^2+y^2) dx dy = \int_E (x-y) \cos(x^2+y^2) dx dy$$

A quest'ultimo integrale è applicabile il Teorema di cambiamento di variabili:

$$(f \circ \underline{\Phi})(r, \theta) = r(\cos \theta - \sin \theta) \cos(r^2)$$

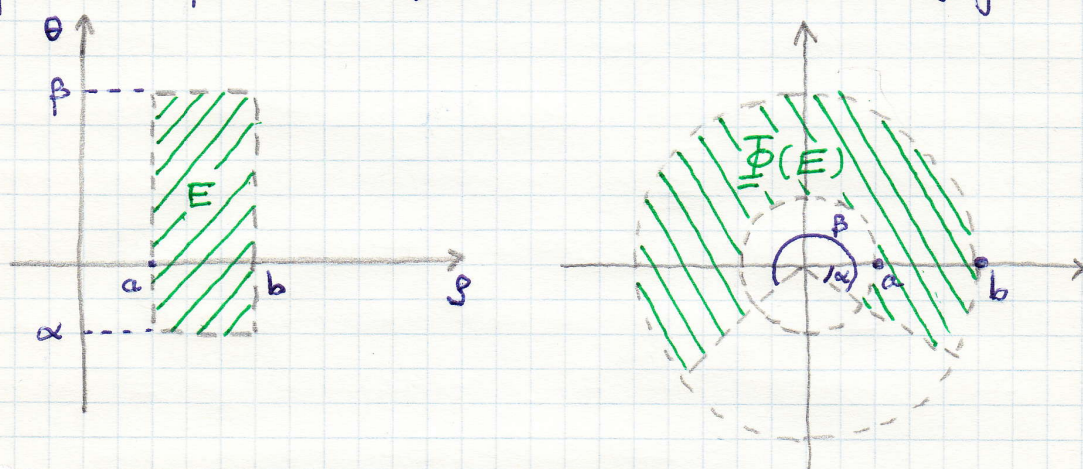
$$\left| \det J_{\underline{\Phi}}(r, \theta) \right| = r, \quad E = \underline{\Phi}((0,1) \times (0,2\pi)).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_E f &= \left(\int_0^1 r^2 \cos(r^2) dr \right) \left(\int_0^{2\pi} (\cos \theta - \sin \theta) d\theta \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

come si poteva osservare fin dall'inizio, perché \bar{B} è simmetrico rispetto all'origine e f è dispari.

Oss. Se $\underline{\Phi}$ non è globalmente invertibile, la formula di cambiamento di variabili negli integrali multipli non vale. Ad esempio, sia $\underline{\Phi}: (a,b) \times (\alpha,\beta) \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\underline{\Phi}(\rho,\theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$. Supponiamo $0 < a < b < +\infty$ e $-\infty < \alpha < \beta < +\infty$. L'insieme $\underline{\Phi}((a,b) \times (\alpha,\beta))$ è, quando $\beta - \alpha > 2\pi$, l'anello circolare in figura,



la cui area è $\pi(b^2 - a^2)$. Invece,

$$\int_a^b \int_\alpha^\beta \rho \, d\rho \, d\theta = (\beta - \alpha) \frac{b^2 - a^2}{2} > \pi(b^2 - a^2).$$

INTEGRAZIONE IN PIÙ VARIABILI

LEZIONE 6

Integrali impropri. I° caso

Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione che assume i valori indicati in figura. Sia Q_R il quadrato centrato in 0 e di lato $2R$.

Chiaramente

$$\int_{Q_R} f = 0$$

per ogni $R > 0$.

Sia Q'_R il quadrato

$Q_R + e_1$, ottenuto traslando Q_R a destra di un'unità. Abbiamo

$$\int_{Q'_R} f = 2R$$

$$\forall R > 0.$$

Quindi

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{Q_R} f = 0 \neq +\infty = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{Q'_R} f.$$

Il fenomeno precedente non si può verificare se $f \geq 0$

Teorema Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ tale che la restrizione di f a

$$B_R := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : |\underline{x}| \leq R\}$$

sia in \mathcal{R} per ogni $R > 0$. Sia $\{\Omega_j\}$ una successione

di insiemi misurabili (quindi limitati) tali che

$$(i) \quad \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \subset \dots$$

$$(ii) \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j = \mathbb{R}^n.$$

Allora

$$J := \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_j} f = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R} f =: I$$

Dim. Fissato j , $\exists R_0: \Omega_j \subset B_R \quad \forall R \geq R_0$ (Ω_j è limitato!)

Quindi

$$\int_{\Omega_j} f \leq \int_{B_R} f \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R} f = I$$

Poiché $j \mapsto \int_{\Omega_j} f$ è monotona crescente, esiste il $\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_j} f$ e quindi $J \leq I$.

Viceversa, fissato $R > 0$, otteniamo che $B_R = \bigcup_{j=1}^{\infty} (B_R \cap \Omega_j)$.

Per la numerabile additività (condizionale) di m_n ,

$$m_n(B_R) = \lim_{j \rightarrow +\infty} m_n(B_R \cap \Omega_j)$$

e quindi

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} m_n(B_R \setminus (B_R \cap \Omega_j)) = 0.$$

Perciò

$$\begin{aligned} \int_{B_R} f &= \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{B_R \cap \Omega_j} f \\ &\leq \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{\Omega_j} f \\ &= J. \end{aligned}$$

Facciamo il limite di ambo i membri per $R \rightarrow +\infty$, otteniamo $I \leq J$ \square

Def. Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ tale che (la restrizione di f a B_R è in \mathcal{R} per ogni $R > 0$)

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R} f < \infty.$$

Diremo che f è **integrabile in \mathbb{R}^n** e poniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} f := \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R} f$$

Data $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, poniamo

$$f_+ := \max(f, 0) \quad f_- := -\min(f, 0)$$

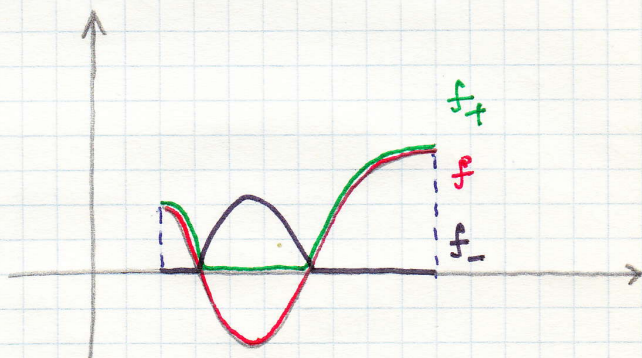
Valgono: $f_+, f_- \geq 0$,

$$0 \leq f_- \leq |f|$$

$$0 \leq f_+ \leq |f|$$

$$f = f_+ - f_-$$

$$|f| = f_+ + f_-$$



$$\Rightarrow f_+ = \frac{f + |f|}{2}, \quad f_- = \frac{|f| - f}{2}.$$

Se la restrizione di f a B_R è in $\mathcal{R} \quad \forall R > 0$, allora la medesima proprietà è soddisfatta da $|f|$ e quindi da f_+ e f_- per le formule precedenti.

Def. Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che la restrizione di f a B_R è in \mathcal{R} per ogni $R > 0$. Se $|f|$ è integrabile

nel senso della definizione precedente, allora diremo che f è **integrabile in \mathbb{R}^n** .

In virtù dell'osservazione precedente, f^+ e f^- sono integrabili (nel senso della def. precedente) e poniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} f := \int_{\mathbb{R}^n} f^+ - \int_{\mathbb{R}^n} f^-$$

$$\left[= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R} f^+ - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R} f^- \right]$$

N.B. Se $n \geq 2$, $\int_{\mathbb{R}^n} f$ è definito **solo quando esso è assolutamente convergente**

Oss. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

Poniamo $I_R := \int_{-R}^R e^{-x^2} dx$, cosicchè $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} I_R$.

Ora,

$$\begin{aligned} I_R^2 &= \left(\int_{-R}^R e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-R}^R e^{-y^2} dy \right) \\ &= \int_{Q_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{Q_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho e^{-\rho^2} d\rho \\ &= 2\pi \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right) \Big|_0^R \\ &= \pi, \end{aligned}$$

da cui la formula richiesta.

Def. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ e $f: E \rightarrow \mathbb{R}$. Diremo che f è integrabile in \mathbb{R}^n se $\mathcal{E}f$ è integrabile in \mathbb{R}^n (nel senso della precedente definizione) e poniamo

$$\int_E f := \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{E}f$$

Es. Sia $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x, y) = y$$

$$\text{con } E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, -\frac{1}{\sqrt{x}} < y < \frac{1}{\sqrt{x}}\}$$

$\mathcal{E}f$, ristretta a

\mathbb{Q}_R è in \mathbb{R} .

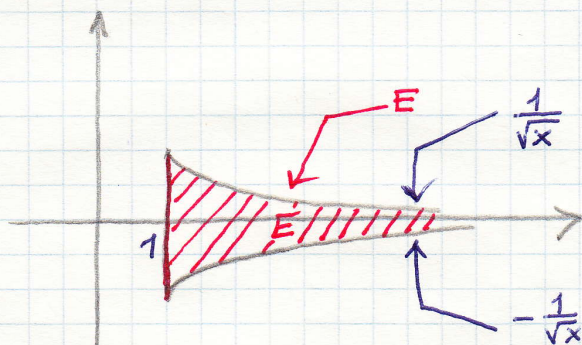
Inoltre

$$\int_{E \cap \mathbb{Q}_R} |f|$$

$$= 2 \int_1^R dx \int_0^{1/\sqrt{x}} y \, dy$$

$$= \int_1^R \frac{dx}{x}$$

$$\rightarrow +\infty \quad \text{per } R \rightarrow +\infty$$



Quindi f non è integrabile in \mathbb{R}^2

Integrali impropri: II° caso

Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ misurabile (quindi limitato) e $f: \Omega \rightarrow [0, +\infty)$ non limitata.

Def. Sia $\{E_j\} \subset \mathcal{M}_{PJ}$ tale che

- (i) $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset \Omega$ e $f|_{E_j}$ è in \mathcal{R} per $j=1, 2, 3, \dots$
- (ii) $m_n(\Omega \setminus E_j) \rightarrow 0$ per $j \rightarrow +\infty$

Se $\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{E_j} f < \infty$, allora diciamo che f è **integrabile in E** , e poniamo

$$\int_E f := \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{E_j} f.$$

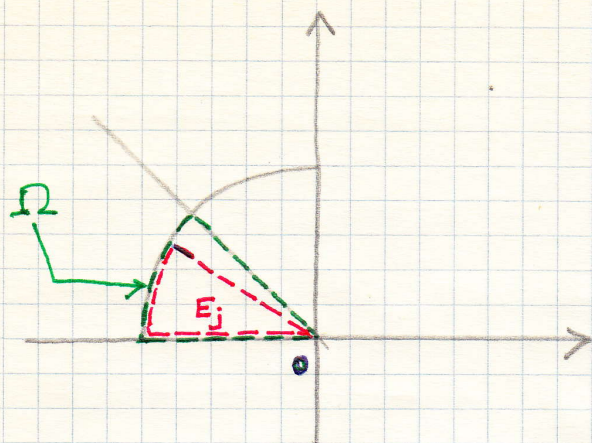
N.B. Procedendo come nel I° caso, si può mostrare che questa è una buona def.; essa non dipende, cioè, dalla successione scelta.

Se poi f è a valori reali, si definisce come nel I° caso l'integrale di f solo se $|f|$ è integrabile (in E) secondo la definizione precedente. Le considerazioni svolte nel I° caso si estendono al II° caso

Es. $f(x, y) = \left(-\frac{1}{x+y}\right)^{1/2}$, $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x < 0, 0 < x^2 + y^2 < 1, 0 < y < -x\}$.

La funzione f è illimitata in un intorno della parte di bordo in comune con la bisettrice del II° quadrante.

Sia $E_j := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x < 0, 0 < x^2 + y^2 < 1, 0 < y < -(1 + \frac{1}{j})x\}$



La restrizione di f a E_j è in \mathbb{R} e

$$\begin{aligned} \int_{E_j} f &= \int_0^1 dp \, p \int_{\pi - \arctan(1+\frac{1}{j})}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{p} (\cos\theta + i\sin\theta)^{1/2}} \\ &= \frac{2}{3} \int_{\pi - \arctan(1+\frac{1}{j})}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta + i\sin\theta}} \end{aligned}$$

La funzione $\frac{1}{\sqrt{\cos\theta + i\sin\theta}}$ è integrabile in senso improprio in $(\frac{3}{4}\pi, \pi)$ e quindi

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{E_j} f < +\infty,$$

cioè f è integrabile in Ω

Es. $f(x,y) = \frac{1}{|x|+y^2}$ in $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

Poniamo $E_j = \{(x,y) \in \Omega \setminus Q_j\}$, dove Q_j è il quadrato centrato in $(0,0)$ e lato $2/j$. Non è difficile mostrare che

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_{E_j} f < \infty.$$

Quindi f è integrabile in Ω .